

JOURNAL OF DIFFERENTIAL EQUATIONS 68, 137–168 (1987)

Solutions à variations bornées pour certains systèmes hyperboliques de lois de conservation

DENIS SERRE

Université de Saint-Etienne & CNRS, 23, rue du Dr. Paul Michelon,
42023 Saint-Etienne Cedex, France

Received February 4, 1985; revised December 31, 1985

Blake Temple (*Trans. Amer. Math. Soc.* **280** (1983), 781–795) has described the hyperbolic systems of two conservation laws whose shock and rarefaction curves coincide. In this note, we prove the global existence of weak solutions for such systems, with any bounded variation initial condition. The proof is based upon standard numerical schemes, as well as upon parabolic regularization. The key is that the total variation of the Riemann invariants is decreasing in time. At least, in the case of the initial condition with compact support, we prove by using the Glimm scheme that the system is decoupling in two conservation laws in one unknown, in finite time. © 1987 Academic Press, Inc.

0. INTRODUCTION

Considérons un système hyperbolique de lois de conservations

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (0.1)$$

où $u(x, t) \in \mathbb{R}^N$ est le champ inconnu. Les valeurs propres de la matrice $\partial f / \partial u$ sont réelles, et dépendent continument de u (si f est de classe \mathcal{C}^2) et même différentiablement lorsqu'elles sont distinctes. Nous les notons $\lambda_i(u)$. Des vecteurs propres à droite $r_i(u)$ leur sont associés.

Temple [13] a étudié les sous-variétés de M de \mathbb{R}^N stables pour le système (0.1), c'est-à-dire telles que la solution faible de (0.1) $u(x, t)$ reste dans M lorsque la condition initiale $u(x, 0)$ est dans M . Temple montre qu'une telle variété est caractéristique: en chacun de ses points, l'espace tangent à M admet pour base les $r_i(u)$, $i \in I \subset \{1, \dots, N\}$. Il obtient ensuite l'alternative suivante, qui caractérise entièrement les sous-variétés stables:

— ou bien λ_i ($i \in I$) est linéairement dégénérée sur M :

$$r_i(u) \cdot \nabla \lambda_i \equiv 0,$$

— ou bien la droite passant par $u \in M$, de direction $r_i(u)$ est contenue dans M , et elle est caractéristique.

En particulier, lorsque seul le deuxième terme de l'alternative a lieu, M est un sous-espace affine de \mathbb{R}^N , et les courbes caractéristiques (qui sont les intégrales des champs $r_i(u)$) sont des droites. A moins que les droites d'une même famille (associées au même champ $r_i(u)$) ne soient parallèles, ce qui est peu intéressant, elles ont une enveloppe dont les points sont des points de dégénérescence du système (0.1). Nous nous intéresserons donc seulement aux solutions de (0.1) qui prennent leurs valeurs dans un domaine \mathcal{D} qui ne rencontre pas cette enveloppe.

Lorsque $N = 2$, Temple a complètement décrit les systèmes de deux lois de conservation pour lesquels les courbes caractéristiques sont des droites. Le domaine \mathcal{D} est donc couvert par deux faisceaux de droites. Dans ce domaine, nous pouvons utiliser les coordonnées attachées à ce système de droites, ce sont les invariants de Riemann $w_1(u)$, $w_2(u)$.

Dans cet article, on étudie ces systèmes, et principalement l'existence d'une solution pour le problème de Cauchy. Nous considérons successivement les méthodes numériques, puis la régularisation parabolique.

Les méthodes numériques qui se prettent le mieux à l'Analyse sont les schémas de Lax and Friedrichs [4], de Godunov [3], et de Glimm [2]. Ils sont basés sur la résolution du problème de Riemann, c'est-à-dire (0.1) muni d'une condition initiale à deux valeurs

$$u(x, 0) = a^\pm \quad \text{si } a \gtrless 0. \quad (0.2)$$

Le problème de Riemann (existence et unicité de $u(x, t) = u(x/t)$) n'a été résolu dans le cas général que lorsque a^+ et a^- sont voisins. Mais dans le cas particulier étudié ici, nous construisons au section 2 une solution, déterminée de manière unique par a^+ et a^- , et par une généralisation de la condition d'Oleinik. Cette solution, outre l'unicité, possède également deux propriétés remarquables:

— la variation totale des applications

$$x \rightarrow w_i(u(x, t)), \quad i = 1, 2$$

reste constante lorsque t varie:

$$VT(w_i \text{ ou } (\cdot, t)) = VT(w_i \text{ ou } (\cdot, 0)).$$

— l'état intermédiaire \bar{u} (qui est la valeur de $u(x, t)$ par $\sigma_1 < x/t < \sigma_2$, σ_2, σ_1 et σ_2 convenables) peut être calculé explicitement même lorsqu'on ne connaît pas la nature (choc ou détente, voir le section 1) des ondes qui le relient à a^+ et a^- . Il est donné par le système d'équations,

$$w_1(\bar{u}) = w_1(a^+), \quad w_2(\bar{u}) = w_2(a^-).$$

Il se présente donc comme l'intersection de deux droites caractéristiques, l'une passant par a^- , l'autre par a^+ .

Ces propriétés permettent d'exprimer (au paragraphe III) sans ambiguïtés les schémas numériques, et de montrer qu'ils ont la propriété TVD: si $u^h(x, t)$ est une solution discrète obtenue à l'aide d'un des trois schémas cités précédemment, et si la condition de Courant–Friedrichs–Levy est vérifiée, alors les variations totales VT ($w_\rho u^h(\cdot, t)$) décroissent.

Par ailleurs, il est aisé de prouver que la solution u^h reste bornée indépendamment de h , et qu'en fait elle reste dans le plus petit rectangle caractéristique contenant $u(\cdot, 0)$. Ces remarques montrent que les solutions discrètes sont définies pour tout $t > 0$, et l'estimation en variation totale permet de passer à la limite lorsque $h \rightarrow 0$: la suite u^h converge vers une solution entropique du système (0.1) (sous la condition de consistance donnée par Liu [9] en ce qui concerne le schéma de Glimm).

La conséquence principale du section 3 est que le système (0, 1) possède une solution globale en temps, entropique, pour toute condition initiale à valeurs dans \mathcal{D} et à variation bornée.

Remarquons que les arguments utilisés sont ceux qui servent dans le cas d'une seule loi de conservation, et qui ne donnent rien en général pour les systèmes.

Le même théorème d'existence est obtenu au section 4, en considérant la convergence de la suite $u^\varepsilon(x, t)$, solution de la régularisation parabolique de (0, 1):

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u^\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2} \quad (\varepsilon > 0). \quad (0.3)$$

Les arguments sont les mêmes que pour les schémas numériques, à savoir:

— on montre que le problème de Cauchy pour (0.3) possède une solution régulière pour tout $t > 0$.

— les invariants de Riemann $w_\rho u^\varepsilon(\cdot, t)$ restent dans un borné de $L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$, indépendant de t et ε .

Encore une fois, l'analogie avec le cas d'une seule équation est frappante. Elle apparait encore au section 5, où nous montrons le découplage du système au bout d'un temps fini T^* , calculable. Si $u(\cdot, 0)$ est constant sur $]-\infty, x^-]$, et constant sur $[x^+, +\infty[$, il existe un temps T^* au delà duquel la solution du système (0.1), obtenue par le schéma de Glimm, a les propriétés suivantes: il existe deux nombres $\sigma_1 < \sigma_2$ tels que

— pour $t > T^*$, $x < \sigma_1 t + x_1$, la solution prend ses valeurs sur la 1ère droite caractéristique issue de $u(-\infty, 0)$. Le système est ramené à une seule loi de conservation.

— pour $t > T^*$, $x > \sigma_2 t + x_2$, la solution prend ses valeurs sur la 2ème droite caractéristique issue de $u(+\infty, 0)$. Idem.

— pour $t > T^*$, $\sigma_1 t + x_1 < x < \sigma_2 t + x_2$, la solution est constante, égale à l'état intermédiaire du problème de Riemann entre $u(-\infty, 0)$ et $u(+\infty, 0)$.

A cause de ce découplage, et aussi de la simplicité de la résolution du problème de Riemann, nous avons cru bon d'appeler découplés les systèmes étudiés ici, en espérant que cela ne prête pas à confusion.

Les deux systèmes qui motivent cette étude sont les suivants:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{1+u+v} \right) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kv}{1+u+v} \right) &= 0,\end{aligned}$$

où $u \geq 0$, $v \geq 0$, et k est une constante positive, différente de 1. On le rencontre en chromatographie.

Le second s'apparente à la dynamique des gaz

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v^2 + u) &= 0,\end{aligned}$$

où $u \geq 0$.

Pour ces deux systèmes, on a donc existence globale d'une solution faible à variations bornées lorsque la condition initiale est à variation bornée et vérifie les inégalités demandées.

1. SYSTEMES HYPERBOLIQUES DECOUPLES

1. *Rappels sur les systèmes hyperboliques*

Nous considérons ici des systèmes de deux lois de conservation à deux inconnues sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, du premier ordre:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad u = (u_1, u_2), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

avec une condition de Cauchy

$$u(x, 0) = a(x). \quad (1.2)$$

Le système (1.1) est dit hyperbolique strictement dans un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 si la matrice $f'(u)$ possède deux valeurs propres distinctes et réelles pour tout $u \in \mathcal{D}$. Nous supposons que f est continument dérivable: les valeurs propres λ_i sont continues sur \mathcal{D} .

On appelle *Kième invariant de Riemann* (Lax [5]) une fonction dérivable $w_k(u)$ sur une partie de \mathcal{D} dont le gradient est un vecteur propre à gauche de $f'(u)$ pour la valeur propre λ_k ,

$$w'_k f' = \lambda_k w'_k. \quad (1.3)$$

L'existence des invariants de Riemann est assurée sur tout ouvert simplement connexe de \mathcal{D} , en considérant les courbes intégrales des vecteurs propres à droite de $f'(u)$.

On appelle *k-onde de détente* une solution classique du système (1.1), vérifiant

$$w_j(u(x(t))) = \text{constante}, \quad j \neq k.$$

Le système (1.1) se réduit alors à l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_k(u) \frac{\partial}{\partial x} \right) w_k(u) = 0. \quad (1.4)$$

Il est connu que le système (1.1) ne possède pas en général de solution globalement régulière, même lorsque la condition initiale l'est: la dérivée u_x devient infinie en certains points (x^*, t^*) , $t^* > 0$. On est donc conduit à chercher des solutions faibles (au sens des distributions).

Une solution faible du système (1.1)–(1.2) est un champ $u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)^2$ vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(u \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} + f(u) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) \theta(x, 0) dx = 0 \quad (1.5)$$

pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)^2$.

Les exemples montrent qu'au delà de t^* se développent des chocs. Un *k-choc* est une solution du système (1.1) au voisinage d'une courbe régulière $\Gamma = \{x(t), t\}; t_0 < t < t_1\}$, continue à droite et à gauche de Γ , et vérifiant la condition de Lax:

$$\lambda_k(u(x(t) - 0, t)) \geq x(t) > \lambda_{k-1}(u(x(t) - 0, t), \quad (1.6)$$

$$\lambda_{k+1}(u(x(t) + 0, t)) > x(t) \geq \lambda_k(u(x(t) + 0, t). \quad (1.7)$$

De nombreux schémas numériques ont été proposés pour approcher la solution du problème (1.1)–(1.2), dont la plupart sont basés sur la résolution du problème de Riemann.

Le problème de Riemann est un cas particulier du problème de Cauchy, pour lequel la condition initiale ne prend que deux valeurs:

$$a(x) = \begin{cases} u^g & \text{si } x < 0, \\ u^d & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Vu l'invariance des Eq. (1.1) et (1.2) par l'action des homothéties de centre $(x, t) = (0, 0)$, on cherche une solution "autosimilaire" $u = U(x/t)$, qui doit vérifier

$$\frac{d}{d\sigma} f(U(\sigma)) = \sigma \frac{dU}{d\sigma}, \quad (1.9)$$

$$U(+\infty) = u^d, \quad U(-\infty) = u^g. \quad (1.10)$$

Lorsque U est régulière au voisinage de σ_0 , $(dU/d\sigma)(\sigma_0)$ est un vecteur propre à droite de $f'(U(\sigma_0))$, pour la valeur propre $\sigma_0 = \lambda(U(\sigma_0))$. Il s'ensuit que $(d/d\sigma) w_j(U(\sigma)) = 0$: on a une k -onde de détente.

Lorsque U est discontinue en σ_0 , mais continue à droite et à gauche, on a un choc le long de la droite $x = \sigma_0 t$. Pour que la solution soit admissible, nous demandons que ce choc soit un k -choc pour $k = 1$ ou 2 .

Lax [5] a montré, sous l'hypothèse que les champs caractéristiques sont linéairement dégénérés ($\partial \lambda_i / \partial w_i \equiv 0$) ou bien vraiment non-linéaires ($\partial \lambda_i / \partial w_i$ ne s'annule pas), que le problème de Riemann est localement résoluble de façon unique: étant donné $u^g \in \mathcal{D}$, il existe deux voisinages $V \subset V_1$ de u^g tels que, si $u^d \in V$, il existe une et une seule solution de (1.9)–(1.10) à valeurs dans V_1 , dont les chocs soient admissibles.

Cette solution vérifie les propriétés suivantes:

- (i) $U(\sigma) = u^g$ pour $\sigma < \sigma_1$,
- (ii) $U(\sigma) = u^0$ pour $\sigma_2 < \sigma < \sigma_3$,
- (iii) $U(\sigma) = u^d$ pour $\sigma_4 < \sigma$,
- (iv) $U(\sigma)$ est une 1-onde (une 1-détente ou un 1-choc) pour $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$,
- (v) est une 2-onde pour $\sigma_3 < \sigma < \sigma_4$.

Lorsqu'on étudie des systèmes particuliers, une étude fine peut permettre d'obtenir une résolution non locale du problème de Riemann. Ce sera l'un de nos buts dans le paragraphe suivant.

2. Découplage des systèmes hyperboliques

Temple [13] a introduit, à propos des équations intervenant en chromatographie, une classe de systèmes que nous appelons *systèmes hyperboliques découplés*. Nous justifierons cette appellation au paragraphe suivant.

DÉFINITION. Un système hyperbolique tel que (1.1) est dit *découplé* si ces courbes de détente $w_j = \text{constante}$, $j = 1$ ou 2 , sont portées par des droites.

Temple montre qu'alors les courbes de détente sont aussi des courbes de choc: si deux points u^- et u^+ sont sur une même courbe de détente, il existe un nombre réel σ tel que

$$f(u^+) - f(u^-) = \sigma(u^+ - u^-).$$

Temple montre également une réciproque: si les courbes de détente du système (1.1) sont des courbes de choc, alors le système est *découplé*, à moins que l'un des champs caractéristiques soit linéairement dégénéré.

Etant donné la coïncidence des courbes de choc et de détente pour un système *découplé*, une telle courbe sera appelée une *courbe d'onde*, et de *k*-onde s'il agit d'une courbe de *k*-détente.

3. Construction de systèmes découplés

Soit K un convexe fermé d'intérieur non vide de \mathbb{R}^2 , et Δ une droite d'appui de K : $\Delta \cap K$ n'est pas vide, et K est situé d'un seul côté de Δ . Sans perte de généralité, on peut supposer que Δ est l'axe vertical $u_1 = 0$ et que $(0, 0) \in K$.

Soit \mathcal{D} le demi-plan défini par $u_1 > 0$. Nous supposons que de tout point $u \in \mathcal{D}$, on peut mener exactement deux droites d'appui (Fig. 1, une au-dessus et une en-dessous) à K .

Remarque. Cette hypothèse est vérifiée si K est compact, ou si K est une parabole, etc.

Les pentes de ces deux droites, finies, sont notées $w_1(u) < w_2(u)$. Elles dépendent de façon continue de u , et leurs courbes de niveau sont des demi-droites portées par des droites d'appui à K .

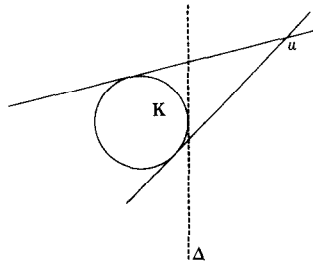


FIGURE 1

En écrivant $u_2 = w_k u_1 + a_k(w_k)$ les équations de ces droites on obtient l'expression de u_1 et u_2 en fonction de $w = (w_1, w_2)$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a_1(w_1) - a_2(w_2)}{w_2 - w_1} \\ u_2 &= \frac{w_2 a_1(w_1) - w_1 a_2(w_2)}{w_2 - w_1}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Supposons maintenant que K ne soit pas compact. Il existe alors une demi-droite de pente \bar{p} incluse dans K , et on a pour tout $u \in \mathcal{D}$,

$$w_1(u) < \bar{p} < w_2(u). \quad (1.12)$$

Si u^- et u^+ sont deux points de \mathcal{D} , les droites

$$u_2 - u_2^- = w_1(u^-)(u_1 - u_1^-) \quad \text{et} \quad u_2 - u_2^+ = w_2(u^+)(u_2 - u_1^+)$$

se coupent en \mathcal{D} , de même que les droites

$$u_2 - u_2^- = w_2(u^-)(u_1 - u_1^-) \quad \text{et} \quad u_2 - u_2^+ = w_1(u^+)(u_2 - u_2^+),$$

grâce à (1.12). Finalement, ces quatre droites délimitent un quadrilatère de \mathcal{D} , dont l'une des diagonales est $[u^-, u^+]$, et dont l'image par $w = (w_1, w_2)$ est le rectangle limité par les droites verticales $w_1 = w_1(u^\pm)$ et horizontales $w_2 = w_2(u^\pm)$.

Si w^- et w^+ sont deux points de l'image W de \mathcal{D} par l'application $u \mapsto w(u)$, W contient donc le rectangle de côtés parallèles aux axes, de diagonale $[w^-, w^+]$. Finalement, il existe des nombres réels $\bar{w}_1 \leq \bar{p} \leq \bar{w}_2$ tels que

$$W =] -\infty, \bar{w}_1[\times] \bar{w}_2, +\infty[.$$

Temple montre que les systèmes hyperbolique découplés \mathcal{D} , dont les invariants de Riemann sont $w_1(u)$ et $w_2(u)$, sont déterminés par les fonctions de flux suivantes:

$$f_1(u) = \frac{h_1(w_1) - h_2(w_2)}{w_2 - w_1}, \quad f_2 = \frac{w_2 h_1(w_1) - w_1 h_2(w_2)}{w_2 - w_1}, \quad (1.13)$$

où h_1 et h_2 sont des fonctions arbitraires d'une variable.

Remarque. Il est possible de construire d'autres domaines \mathcal{D} et invariants $w_i(u)$, $i = 1, 2$, constants sur des droites de pente w_i notamment lorsque de certains points à droite de \mathcal{A} , on ne peut mener qu'une droite d'appui à K .

Par exemple, si Γ est l'hyperbole d'équation $(u_1 - 1)^2 - u_2^2 = 1$, prenons l'intérieur des deux branches de Γ pour l'ensemble K . Cet ensemble n'est plus convexe mais de tout point n'appartenant pas à K , on peut lui mener exactement deux droites d'appui. Si on pose alors $\mathcal{D} = \{u; 0 < u_1 < 2\}$, on vérifie comme précédemment que l'image de \mathcal{D} est un rectangle $] -\infty, -1] \times [1, +\infty[$. L'application $u \rightarrow w(u)$ n'est cependant pas injective sur \mathcal{D} et pour qu'elle le soit, il faut par exemple se restreindre à

$$\mathcal{D}^+ = \{u \in \mathbb{R}^2, 0 < u_1 < 2, 0 < u_2\}.$$

4. Exemples

Nous en présentons deux, le détail des calculs étant laissé au lecteur.

(a) *Un système issu de la chromatographie.* Le système suivant est cité par Aris et Amundson [1], et repris par Temple,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u}{1 + u + v} = 0, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \frac{kv}{1 + u + v} = 0, \quad (1.15)$$

où k est un nombre réel, $0 < k < 1$.

Les invariants de Riemann w_1 et w_2 sont les solutions de l'équation du second degré

$$uw^2 + w(k(1 + u) - 1 - v) - kv = 0. \quad (1.16)$$

Le convexe K est l'intérieur de la parabole d'équation

$$(v + ku)^2 + 2(1 - k)(v - ku) + (1 - k)^2 = 0. \quad (1.17)$$

L'ensemble de valeurs $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ qui intéresse le chromatographe est

$$\mathcal{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u > 0, v > 0\}.$$

On vérifie que l'application $(u, v) \rightarrow (w_1, w_2)$ est une bijection de \mathcal{D} sur le rectangle $W =] -\infty, 0[\times]0, +\infty[$.

(b) *Deuxième exemple.* Le système suivant, cité par Le Roux [6], s'apparente à la dynamique des gaz, mais d'assez loin:

$$u_t + (uv)_x = 0 \quad (1.18)$$

$$v_t + (v^2 + u)_x = 0. \quad (1.19)$$

Les invariants w_1 et w_2 sont les solutions de l'équation du second degré

$$w^2u - wv - 1 = 0. \quad (1.20)$$

Le convexe K est l'intérieur de la parabole d'équation

$$v^2 + 4u = 0. \quad (1.20)$$

Enfin, l'image de $\mathcal{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u > 0\}$ par w est le rectangle \mathbb{R}^2 .

2. LE PROBLÈME DE RIEMANN

Nous résolvons maintenant le problème de Riemann (1.1)–(1.2), (1.8) pour les systèmes hyperboliques découplés dans un domaine de phases \mathcal{D} . Nous supposons dans ce paragraphe que l'image de \mathcal{D} par l'application $u \rightarrow w = (w_1(u), w_2(u))$ est un rectangle $\mathcal{R} =]\alpha_1^-, \alpha_1^+ [\times]\alpha_2^-, \alpha_2^+ [$, avec $\alpha_1^+ \leq \alpha_2^-$ et que cette application est injective sur \mathcal{D} .

1. Un cas particulier

Nous considérons dans un premier temps le cas où $w_2(u^g) = w_2(u^d)$. Le système (1.1) étant découplé, nous pourrions démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. *Si $w_2(u^g) = w_2(u^d)$, il existe une solution du problème de Riemann (1.1)–(1.2), (1.8) qui prend ses valeurs sur le segment d'extrémités u^g et u^d ($u = u^g + \theta(u^d - u^g)$, $0 \leq \theta \leq 1$).*

De plus, parmi ces solutions, il y en a une et une seule qui vérifie la “condition d'Oleinik” (voir [11]).

Démonstration. Nous cherchons une solution $U(\sigma)$ de l'équation (1.9), qui soit portée par le segment $[u^g, u^d]$. On a (d'après (1.11) et (1.13)):

$$U_2(\sigma) = w_2(u^d) U_1(\sigma) + a_2(w_2(u^d)). \quad (2.1)$$

$$f_2(U(\sigma)) = w_2(u^d) f_1(U(\sigma)) + h_2(w_2(u^d)). \quad (2.2)$$

Le système (1.9) équivaut donc à:

$$\frac{d}{d\sigma} f_1(U_1, w_2 U_1 + a_2) = \sigma \frac{dU_1}{d\sigma}, \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{d\sigma} (w_2 f_1(U_1, w_2 U_1 + a_2) + h_2) = \sigma \frac{d}{d\sigma} (w_2 U_1 + a_2). \quad (2.4)$$

Clairement, (2.3) implique (2.4), et (1.9) se réduit à (2.3), c'est-à-dire à

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_2(u_1) = 0, \quad (2.5)$$

où $F_2 = f_1(y, w_2 y + a_2)$.

Avec les conditions $u_1(x, 0) = u_1^g$ (si $x < 0$) ou u_1^d (si $x > 0$), on doit résoudre un problème de Riemann pour la loi de conservation (2.5). Ce problème possède une solution unique vérifiant la condition d'Oleinik [11]:

les valeurs prises par $(u_1, F_2(u_1))$ sont sur le bord de l'enveloppe convexe du graphe:

$$\{(y, F_2(y)); \text{Min}(u_1^g, u_1^d) \leq y \leq \text{Max}(u_1^g, u_1^d)\}. \quad (2.6)$$

On obtient alors la solution cherchée en posant

$$u_2(x, t) = w_2(u^d) u_1(x, t) + a_2(w_2(u^d)). \quad \blacksquare$$

De manière symétrique, si $w_1(u^g) = w_1(u^d)$ on obtient une solution du problème de Riemann en résolvant la loi de conservation

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_1(u_1) = 0 \quad (2.7)$$

où $F_1(y) = f_1(y, w_1(u^d) y + a_1(w_1(u^d)))$, avec $u_1(x, 0) = u_1^g$ (si $x < 0$) où u_1^d (si $x > 0$), puis en posant

$$u_2(x, t) = w_1(u^d) u_1(x, t) + a_1(w_1(u^d)).$$

Cette solution est unique lorsqu'on impose la condition d'Oleinik (2.6) avec F_1 au lieu de F_2 .

2. Le cas général

Dans le cas général, il s'agit de trouver un état médian $u^0 \in \mathcal{D}$ tel que u^g soit lié à u^0 par une 1-onde, et u^0 soit lié à u^d par une 2-onde. Les courbes de k -choc et de k -detente étant communes, on aura donc

$$w_2(u^0) = w_2(u^g), \quad w_1(u^0) = w_1(u^d). \quad (2.8)$$

Puisque par hypothèse, l'application

$$u \rightarrow w(u)$$

est une bijection du domaine \mathcal{D} sur le rectangle \mathcal{R} , les équations (2.8) définissent un point et un seul de \mathcal{D} , qui est l'intersection de la droite passant par u^g , de pente $w_2(u^g)$, et de la droite passant par u^d , pente $w_1(u^d)$.

D'après le théorème 2.1, il existe une solution unique du problème de Riemann, joignant u^g à u^0 , et vérifiant la condition d'Oleinik (2.6). Notons-la $y(x, t) = Y(x/t)$. Il existe de même une solution unique du problème de Riemann, joignant u^0 à u^d , et vérifiant la condition d'Oleinik. Nous la notons $z(x, t) = Z(x/t)$.

La condition d'Oleinik entraîne que

$$Y(\sigma) = u^0 \quad \text{pour } \sigma > \rho_1, \quad (2.9)$$

où ρ_1 est la borne supérieure de $F'_2 = \lambda_1$, prise sur le segment $[u^g, u^0]$. De même,

$$Z(\sigma) = u^0 \quad \text{pour } \sigma < \rho_2, \quad (2.10)$$

où ρ_2 est la borne inférieure de $F'_1 = \lambda_2$, prise sur $[u^0, u^d]$.

Supposons maintenant que $\rho_1 < \rho_2$, ce qui est une hypothèse plus forte que la seule hyperbolicité. Alors on peut superposer les solutions Y et Z , et définir

$$u(x, t) = \begin{cases} Y(\frac{x}{t}) & \text{pour } x/t < \rho_2, \\ Z(\frac{x}{t}) & \text{pour } x/t > \rho_1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Il est clair que $u(x, t)$ est solution auto-similaire du problème (1.1)–(1.2), (1.8) et qu'elle vérifie la condition d'entropie de Lax. Vu l'unicité de u^0 et elle de $y(x, t)$, $z(x, t)$, nous posons:

DÉFINITION. Le champ $u(x; t)$ défini par (2.11) est la solution du problème de Riemann qui lie u^g à u^d . On la note $G(x/t; u^g, u^d)$.

3. Stabilité L^∞ et BV

Il est connu que la solution $y(x, t) = Y(x/t)$ est une fonction monotone de x/t à valeurs dans le segment $[u^g, u^0]$. L'application $x/t \rightarrow w_1(G(x/t; u^g, u^d))$ est donc monotone sur $] -\infty, \lambda_2(u_0^d)[$. Par ailleurs, elle est constante sur $]\lambda_1(u_0), +\infty[$, donc monotone sur \mathbb{R} tout entier. Finalement,

PROPOSITION 2.2. La résolution du problème de Riemann est stable dans L^∞ et BV:

$$\begin{aligned} \text{Min}(w_i(u^g), w_i(u^d)) &\leq w_i(G(\sigma, u^g, u^d)) \leq \text{Max}(w_i(u^g), w_i(u^d)), \\ VT(w_i(\cdot; u^g, u^d)) &= |w_i(u^g) - w_i(u^d)|. \end{aligned}$$

3. CONVERGENCE DE SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCES FINIES

Nous supposons dans ce paragraphe que

$$\sup_{R^0} \lambda_1 < \inf_{R^0} \lambda_2, \quad (3.0)$$

ce qui nous permettra d'utiliser le paragraphe précédent.

Nous étudions maintenant les trois schémas classiques basés sur la résolution du problème de Riemann: Lax–Friedrichs [4], Godunov [3], et Glimm [2]. Nous montrons qu'ils sont stables dans les espaces L^∞ et BV (fonctions à variation bornée au sens de Tonelli–Cesari) ce qui suffit pour assurer leur convergence:

1. Présentation des schémas

Soient $\Delta x > 0$ et $\Delta t > 0$ les pas d'espace et de temps. La solution approchée de (1.1) est un champ $(x, t) \rightarrow u^{\Delta x, \Delta t}(x, t)$, constante sur les rectangles $\prod_m^n =](m-1)\Delta x, (m+1)\Delta x[\times]n\Delta t, (n+1)\Delta t[$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in I_n$:

* $I_n = \{m \in \mathbb{Z}; m+n \text{ est pair}\}$ dans les schémas de Glimm (GM) et de Lax–Friedrichs (LF),

* $I_n = 2\mathbb{Z}$ dans le schéma de Godunov (GV).

Nous notons u_m^n la valeur de $u^{\Delta x, \Delta t}$ sur le pavé \prod_m^n , $m \in I_n$.

Soit $G^n = \{u_m^n; m \in I_n\} \subset \mathcal{D}$. Supposons que $w(G^n)$ soit contenu dans un rectangle compact $R^n = [w_1^-, w_1^+] \times [w_2^-, w_2^+]$ de \mathcal{D} . Notons

$$\sigma_n = (\text{Max}_{k=1,2} \sup_{w(u) \in R^n} |\lambda_k(u)|)^{-1}. \quad (3.1)$$

Le système (1.1), muni de la condition de Cauchy,

$$u(x, n\Delta t) = u \text{ si } m \in I_n, (m-1)\Delta x < x < (m+1)\Delta x, \quad (3.2)$$

possède une solution pour $0 < t - n\Delta t$ assez petit, qui est donnée par

$$u^n(x, t) = G\left(\frac{x - (m-1)\Delta x}{t - n\Delta t}; u_{m-2}^n, u_m^n\right) \text{ si } m \in I_n \text{ et } (m-2)\Delta x < x < m\Delta x. \quad (3.3)$$

D'après la proposition 2.2, $u(x, t)$ prend ses valeurs dans $w^{-1}(R^n)$, de sorte que (3.3) définit une solution du problème de Cauchy (1.1), (3.2) pour

$$0 < t - n\Delta t < \sigma_n \Delta x. \quad (3.4)$$

En particulier, (3.3) donne la solution pour $t \in]nt, (n+1)\Delta t[$ pourvu que la condition de Courant–Friedrich–Levy soit vérifiée

$$\Delta t / \Delta x \leq \sigma_n. \quad (3.5)$$

Chaque schéma est défini par une application

$$u^n(\cdot, (n+1)\Delta t) \rightarrow \{u_m^n; m \in I_n\}, \quad (3.6)$$

qui peut également être utilisée pour interpoler la condition initiale (1.2). Cette application est définie comme suit:

Schémas de Lax–Friedrichs et Godunov. Pour $m \in I_{n+1}$ on pose

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2\Delta x} \int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x} u^n(y, (n+1)\Delta t) dy. \quad (3.7)$$

Schéma de Glimm. Pour $m \in I_{n+1}$, on pose

$$u_m^{n+1} = u^n((m + a_n)\Delta x, (n+1)\Delta t). \quad (3.8)$$

La suite a_n est une suite équirépartie à valeurs dans l'intervalle $[-1, +1]$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \# \{n \leq N: a_n \in [a, b]\} = (b - a)/2. \quad (3.9)$$

2. Stabilité L^∞

L'ensemble $w^{-1}(R^n)$ est un quadrilatère convexe de \mathcal{D} dans lequel $u^n(\cdot, (n+1)\Delta t)$ prend ses valeurs. On en déduit

$$G^{n+1} \subset w^{-1}(R^n) \quad (3.10)$$

et

$$R^{n+1} \subset R^n. \quad (3.11)$$

En particulier, $R^n \subset R^0$ et $\sigma_n \geq \sigma_0$ pour tout n . Le choix de

$$\Delta t / \Delta x \leq \sigma \quad (3.12)$$

permet donc de vérifier chacune des conditions CFL (3.5).

THÉORÈME 3.1. Soit $G^0 = \{a(x); x \in \mathbb{R}\}$. Supposons que $w(G^0)$ soit inclus dans un rectangle compact R^0 de \mathcal{R} , et que la condition de Courant–Friedrich–Levy

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq (\text{Max}_{k=1,2} \text{Sup}_{w(u) \in R^0} |\lambda_k(u)|)^{-1}$$

soit vérifiée. Alors chacun des trois schémas LF , GV , ou GM définit une suite u_m^n , $m \in I_n$, $n \in \mathbb{N}$, qui prend ses valeurs dans $w^{-1}(R^0)$.

Il est bien connu que cette estimation en norme L^∞ ne suffit pas pour assurer la convergence des schémas, du fait de la nonlinéarité du système (1.1). Il faut en plus une estimation des dérivées premières (ici des différences premières), ce qui est l'objet des deux sections suivantes.

3. Décroissance de la variation totale des invariants de Riemann

Rappelons la définition de la variation totale d'une fonction de la variable réelle.

Si $x \rightarrow g(x)$ est une fonction définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans un espace vectoriel normé, on note

$$VT(g) = \sup_{\{x_n\}} \sum_{n=0}^{+\infty} |g(x_{n+1}) - g(x_n)|$$

où $\{x_n\}$ parcourt l'ensemble des suites croissantes de \mathbb{R} . L'ensemble $BV(\mathbb{R}) = \{g; VT(g) < +\infty\}$ est un espace de Banach pour la norme $\|g\| = |g|_\infty + VT(g)$.

L'objet de cette section est de prouver que la variation totale de $w(u^{Ax, \Delta t}(\cdot, t))$ ($i = 1$ ou 2) décroît au cours du temps.

THÉORÈME 3.2. *Sous les hypothèses du théorème 3.1, les applications*

$$t \rightarrow VT(w(u^{Ax, \Delta t}(\cdot, t))), \quad i = 1, 2$$

sont décroissantes.

Démonstration. Pour $n\Delta t < t < (n+1)\Delta t$, cette quantité vaut

$$VT_i^n = \sum_{m \in I_n} |W_i(u_{m+2}^n) - w_i(u_m^n)|.$$

Cependant, les définitions (3.7) et (3.8) montrent dans chaque cas que u_m^n appartient à l'enveloppe convexe fermée de

$$\{u^{n-1}(x, n\Delta t); |x - m\Delta x| < \Delta x\}.$$

En particulier, u_m^n appartient au convexe défini par les inéquations

$$w_i(u) \leq \sup\{w_i(u^{n-1}(x, n\Delta t)); |x - m\Delta x| < \Delta x\},$$

$$w_i(u) \geq \inf\{w_i(u^{n-1}(x, n\Delta t)); |x - m\Delta x| < \Delta x\}.$$

On en déduit aisément que

$$VT_i^n \leq VT(w_i(u^{n-1}(\cdot, n\Delta t))),$$

et d'après la proposition 2.2:

$$VT_i^n \leq VT_i^{n-1}.$$

4. Estimation BV

Si μ est une mesure bornée sur $\mathbb{R} \times]0, L[$, nous notons $\|\mu\|$ sa masse:

$$\|\mu\| = \text{Sup} \{ \langle \mu, \varphi \rangle; \varphi \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R} \times]0, L[\mid |\varphi|_\infty \leq 1 \}.$$

D'après le théorème (3.2), on a

$$\left\| \left\| \frac{\partial}{\partial x} w_i^{Ax, \Delta t} \right\| \right\| \leq L VT(w_i(a)). \quad (3.13)$$

Nous allons maintenant majorer la masse de

$$(\partial/\partial t) u^{Ax, \Delta t} \quad \text{indépendamment de } (Ax, \Delta t).$$

Nous supposons que $L = N\Delta t$. Le calcul est différent pour chaque schéma.

Le schéma de Godunov. On a la formule

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(G(0; u_m^n, u_{m+2}^n)) - f(G(0; u_{m-2}^n, u_m^n))] \quad (3.14)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left\| \left\| \frac{\partial}{\partial t} u^{Ax, \Delta t} \right\| \right\| &= \sum_{n=1}^{N-1} 2\Delta x \sum_{m \text{ pair}} |u_m^{n+1} - u_m^n| \\ &\leq \sum_{m \text{ pair}} \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} |f(G(0; u_m^n, u_{m+2}^n)) - f(G(0; u_{m-2}^n, u_m^n))| \\ &\leq \sum_{m \text{ pair}} K_1 \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} |G(0; u_m^n, u_{m+2}^n) - G(0; u_{m-2}^n, u_m^n)| \\ &\leq K_1 \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} VT(u^{n-1}(\cdot, n\Delta t)), \end{aligned} \quad (3.15)$$

où

$$K_1 = \text{Sup} \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \right\| \cdot w(u) \in R^0 \right\}.$$

Or, d'après le théorème 3.2, il existe une constante K_2 , qui dépend également de R^0 , telle que

$$VT(u^{Ax, \Delta t}(\cdot, t)) \leq K_2 VT(a). \quad (3.16)$$

Finalement, il vient

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} u^{\Delta x, \Delta t} \right\| \leq K_1 K_2 L VT(a). \quad (3.17)$$

Le schéma de Lax–Friedrichs. On a la formule

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{m+1}^n + u_{m-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(u_{m+1}^n) - f(u_{m-1}^n)], \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial t} u^{\Delta x, \Delta t} \right\| &= \sum_{n=1}^{N-1} \Delta x \sum_{m \in I_{n+1}} \{ |u_m^{n+1} - u_{m+1}^n| + |u_m^{n+1} - u_{m-1}^n| \} \\ &\leq \Delta x \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m \in I_{n+1}} \left\{ |u_{m+1}^n - u_{m-1}^n| + \left| \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(u_{m+1}^n) - f(u_{m-1}^n)] \right| \right\} \\ &\leq (\Delta x + K_1 \Delta t) \sum_{n=1}^{N-1} VT(u^{\Delta x, \Delta t}(\cdot, n\Delta t)) \\ &\leq (\sigma^{-1} + K_1) K_2 VT(a), \end{aligned} \quad (3.19)$$

où $\sigma = \Delta t / \Delta x$.

Le schéma de Glimm. Comme pour le schéma LF, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u^{\Delta x, \Delta t} &= \sum_{n=1}^{N-1} \Delta x \sum_{m \in I_{n+1}} \{ |u_m^{n+1} - u_{m+1}^n| + |u_m^{n+1} - u_{m-1}^n| \} \\ &= \Delta x \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m \in I_n} \{ |u^n((m+a_n)\Delta x, (n+1)\Delta t) \\ &\quad - u^n((m-1)\Delta x, (n+1)\Delta t)| \\ &\quad + |u^n((m+a_n)\Delta x, (n+1)\Delta t) - u^n((m+1)\Delta x, (n+1)\Delta t)| \} \\ &\leq \Delta x \sum_{n=1}^{N-1} VT(u(\cdot, (n+1)\Delta t)) \\ &\leq \sigma^{-1} K_2 VT(a). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Remarque. Chacune des estimations (3.18) et (3.20) est plus fine que (3.19). Cela semble indiquer que le schéma de Lax–Friedrich est relativement moins stable que chacun des deux autres.

5. Convergence des schémas

On considère maintenant la famille

$$\{u^{\Delta x, \Delta t}; 0 < \Delta x, 0 < \Delta t, \Delta t < \sigma_0 \Delta x\}$$

pour chacun des trois schémas présentés ci-dessus. D'après la proposition 2 et les estimations (3.13), (3.17), (3.19), (3.20), cette famille possède des valeurs d'adhérence au sens suivant

$$\begin{aligned} u^{Ax, At} &\rightarrow u && \text{dans } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+), \\ u^{Ax, At} &\rightarrow u && \text{dans } L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \text{ faible-étoile} \\ u^{Ax, At}(x, t) &\rightarrow u(x, t) && \text{pp } x, t \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Remarque. Le champ $u(x, t)$ prend ses valeurs dans $w^{-1}(R^0)$, puisque cet ensemble est convexe.

La démonstration de la convergence des schémas est alors élémentaire pour Lax–Friedrichs et Godunov, et on peut les trouver dans les articles de Oleinik [10], Le Roux [7]. Cette convergence est nettement plus difficile à établir pour le schéma de Glimm. Elle fut d'abord prouvée pour presque toute suite $\{a_n\}_n$ [2], puis pour toute suite équidistribuée [9]. Cependant, ce dernier article n'affirme pas clairement que l'équidistribution de la suite $\{a_n\}_n$ équivaut à la consistance du schéma. C'est pourquoi nous préférons référer à l'article de Schatzman [12].

Finalement, l'étude de chacun des trois schémas nous permet d'énoncer le résultat d'existence globale suivant pour le système (1.1).

THÉORÈME 3.3. *Soit un système strictement hyperbolique de deux lois de conservation (1.1), découplé dans un domaine \mathcal{D} . Soit $u^0(x)$ un champ à variation bornée défini sur \mathbb{R} , à valeurs dans un domaine compact dont l'image par l'application $u \rightarrow w$ est incluse dans un rectangle R^0 dont les côtés sont parallèles aux axes. Nous supposons que (3.0) a lieu. Alors le problème de Cauchy*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad (1.2)$$

possède une solution faible, à valeurs dans le quadrilatère $w^{-1}(R^0)$, à variation bornée sur $\mathbb{R} \times (0, T)$, $\forall T > 0$. La variation totale de chaque invariant de Riemann $w_i(u(\cdot, t))$ décroît avec t . Enfin, si Φ est une entropie du système (1.1), convexe sur $w^{-1}(R^0)$ de flux, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(u) + \frac{\partial}{\partial x} \Psi(u) \leq 0. \quad (3.21)$$

La seule assertion que nous n'ayons pas encore prouvée est l'inégalité (3.21), qui exprime que u est une solution *admissible* ou *entropique*. Cette

condition n'est pas vide, puisque Lax a construit des entropies convexes, au moins lorsque le système est vraiment non linéaire ($\partial \lambda_i / \partial w_i > 0$ ou < 0 , $i = 1, 2$). Rappelons qu'une entropie 0, de flux est une fonction définie sur \mathcal{D} , dérivable telle que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial u}. \quad (3.22)$$

Cette relation exprime que toute solution *régulière* de (1.1) vérifie aussi

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(u) + \frac{\partial}{\partial x} \Psi(u) = 0.$$

Démonstration de (3.21). On commence par remarquer que l'inégalité est vérifiée par les solutions du problème de Riemann, en vertu de la condition d'Oleinik (2.6). En intégrant cette inégalité sur $[\tau]_m^n$ et en utilisant la convexité de 0, on obtient aisément

$$(i) \quad \Phi(u_{m+1}^n) < \frac{1}{2}(\Phi(u_{m+1}) + \Phi(u_{m-1}^n)) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\Psi(u_{m+1}^n) - \Psi(u_{m-1}^n))$$

pour Lax-Friedrichs. (3.23)

$$(ii) \quad \Phi(u_{m+1}^n) \leq \Phi(u_m^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\Psi(G(0; u_m^n, u_{m+2}^n)) - \Psi(G(0; u_m^n, u_{m-2}^n)))$$

pour Godunov. (3.24)

4. APPROXIMATION PAR UN SYSTÈME PARABOLIQUE

Le but de ce paragraphe est de prouver que si

$$(P) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = a(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

$$(1.2)$$

est un système hyperbolique découplé de deux lois de conservations, alors les solutions $u^\varepsilon(x, t)$ du problème parabolique (P_ε) ci-dessous convergent vers une solution entropique du système (P) :

$$(P_\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = a(x), \\ u \end{cases} \quad (4.1)$$

$$(4.2') \quad \text{essentiellement borné.}$$

THÉOREME 4.1. *On suppose que (P) est découplé, strictement hyperbolique sur un domaine invariant \mathcal{D} défini par*

$$w_i^- \leq w_i(u) \leq w_i^+, \quad i = 1, 2.$$

On suppose également que $a(\cdot)$ est à valeurs dans \mathcal{D} , et à variation bornée. Alors,

(i) *Le système (P_ε) possède une solution $u^\varepsilon(x, t)$, à variations bornées (sens de Tonelli-Cesari) sur $\mathbb{R} \times]0, T]$, pour tout $T > 0$, et de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. De plus,*

$$VT(u^\varepsilon(\cdot, t)) \leq (C_0 VT(a))$$

où C_0 est une constante indépendante de ε et t , et $u^\varepsilon(x, t) \in \mathcal{D} \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0$.

(ii) *Les valeurs d'adhérence dans $L^\infty(\mathbb{R} \times]0, +\infty[)$ faible-étoile de la suite u^ε sont des solutions entropiques (cf. Sect. 3) du système (P).*

La démonstration de ce théorème, assez longue, fait l'objet des paragraphes suivants. Pour démontrer l'existence de u^ε , nous introduisons tout d'abord le système

$$(P_{\varepsilon, L}) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in]-L, L[, t > 0, \\ u(x, 0) = a(x) \\ u(t, -L) = a^-, & u(t, L) = a^+ \end{cases} \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

$$(4.4')$$

où $a^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a(x)$. Rappelons que cette limite existe puisque a est à variation bornée.

Il est connu que le problème $(P_{\varepsilon, L})$ possède une solution au moins locale en temps, régulière. Nous la notons $u^{\varepsilon, L}(x, t)$.

1. Estimations de $u^{\varepsilon, L}$

Dans tout ce paragraphe $\varepsilon > 0$, $L > 0$ étant fixés, nous les omettons.

(a) Soit $w(x, t) = w(u(x, t))$ l'un des invariants de Riemann du système, associé à la valeur propre $\lambda(u)$. On vérifie aisément l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} = \varepsilon w' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.5)$$

On a noté $w' \cdot v = (\partial w / \partial u) v$. Or

$$w' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(w' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) - w'' \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

où w'' est la forme quadratique Hessienne de w (calculée naturellement en $u(x, t)$). Il faut maintenant remarquer la propriété fondamentale des systèmes découplés:

LEMME 4.2. *Il existe une fonction vectorielle $z(u)$ telle que $\forall u \in \mathcal{D}$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$, on ait*

$$w''(v, v) = (z \cdot v)(w' \cdot v).$$

Ceci équivaut au fait que les courbes de détente ($w(u) = \text{constante}$) sont des droites. Ainsi:

$$w' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(z(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (4.6)$$

ce qui entraîne

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \left(\lambda(u) + \varepsilon z(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right\} w = \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.7)$$

On peut alors appliquer le principe du maximum à l'équation (4.7):

$$\begin{aligned} \text{Min}(w(a^-), w(a^+), \quad \text{Inf } w(a(x))) \leq w(x, t) \leq \text{Max}(w(a^-), w(a^+), \\ \text{Sup } w(a(x))). \end{aligned}$$

Appliquant cela à w_1 et w_2 , on en déduit que

$$u^{\varepsilon, L}(x, t) \in \mathcal{D}, \quad -L < x < L, \quad 0 < t < T^*, \quad (4.8)$$

où $]0, T^*[$ est l'intervalle maximal d'existence de $u^{\varepsilon, L}$.

Puisque f est de classe \mathcal{C}^1 , nous pouvons alors utiliser sa constante de Lipschitz ω sur \mathcal{D} . Il vient

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \leq w \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \quad (4.9)$$

et ceci assure l'existence global de $u^{\varepsilon, L}$:

$$T^* = +\infty. \quad (4.10)$$

(b) Nous procédons maintenant à une estimation de $u^{\varepsilon, L}$ dans $L^2(0, T, H^1([-L, L]))$, $T > 0$. Nous définissons une fonction affine $C_L(x)$ sur $] -L, L[$ par $C_L(-L) = a^-$, $C_L(L) = a^+$. En posant $v^{\varepsilon, L} = u^{\varepsilon, L} - C_L$, on a

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad -L < x < L, \quad 0 < t, \quad (4.11)$$

$$v(0, x) = a(x) - C_L(x), \quad (4.12)$$

$$v(t, \pm L) = 0. \quad (4.12')$$

On en déduit

$$\frac{d}{dt} \int_{-L}^{+L} \frac{1}{2} |v|^2 dx + \varepsilon \int_{-L}^{+L} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 dx = \int_{-L}^{+L} f(u) \frac{\partial v}{\partial x} dx. \quad (4.13)$$

Or $f(u) = f(u) - f(C_L) + f(C_L)$, et on a les estimations

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{+L} f(C_L) \frac{\partial v}{\partial x} dx &= - \int_{-L}^{+L} v \frac{\partial}{\partial x} f(C_L) dx = - \int_{-L}^{+L} v \cdot f'(C_L) \frac{a^+ - a^-}{2L} dx \\ \left| \int_{-L}^{+L} f(C) \frac{\partial v}{\partial x} dx \right| &\leq \frac{k_1}{2L} \int_{-L}^{+L} |v| dx \leq k_1 \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} |v|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

et

$$\begin{aligned} \left| \int_{-L}^{+L} (f(u) - f(C_L)) \frac{\partial v}{\partial x} dx \right| &\leq \omega \int_{-L}^{+L} |v| \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| dx \\ &\leq \omega \left(\int_{-L}^{+L} |v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-L}^{+L} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-L}^{+L} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 dx + \frac{\omega^2}{2\varepsilon} \int_{-L}^{+L} |v|^2 dx \end{aligned} \quad (4.15)$$

d'après les inégalités de Schwartz et Young. Finalement,

$$\frac{d}{dt} y(t) + \varepsilon z(t) \leq \frac{\omega^2}{\varepsilon} y(t) + k_1 \sqrt{(2/L) y(t)}, \quad (4.16)$$

où

$$y(t) = \int_{-L}^{+L} |v|^2 dx, \quad z(t) = \int_{-L}^{+L} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 dx$$

sont des fonctions positives. On en déduit, par l'inégalité de Gronwall, que pour $L \geq 1$, on a

$$y(t) \leq y \exp k_2 t$$

$$\int_0^t z(s) ds \leq z_0 \exp k_2 t,$$

où y_0, z_0, k_2 sont indépendant de L .

On traduit cela en disant que la suite $v^{\varepsilon, L}$ reste bornée dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ lorsque $L \rightarrow +\infty$, de même que $\partial v^{\varepsilon, L}/\partial x$. Remarquons que ces affirmations ont un sens en prolongeant $v^{\varepsilon, L}$ par 0 hors de l'intervalle $] -L, L[$.

En utilisant (4.11), on en déduit que la suite $\partial v^{\varepsilon, L}/\partial t$ reste bornée dans $L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$ lorsque $L \rightarrow +\infty$.

2. Existence d'une solution de (P_ε)

(a) D'après le paragraphe précédent, $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut extraire une sous-suite v^{ε, L_m} , $L_m \rightarrow +\infty$, telle que

$$v^{\varepsilon, L} \rightarrow u^\varepsilon \quad \text{dans } L^\infty(Q_T) \text{ faible-étoile,}$$

et dans $L^2(0, T; L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$ (d'après un lemme de compacité, cf. Lions [8]), et presque partout dans $Q_T = \mathbb{R} \times]0, T[$.

Comme $C_L(X) \rightarrow 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $L \rightarrow +\infty$, le théorème de convergence dominée entraîne que

$$f(v^{\varepsilon, L_m}) \rightarrow f(u^\varepsilon) \quad \text{dans } L^1_{\text{loc}}(Q_T).$$

On peut passer à la limite dans l'équation (4.11), et on obtient ainsi l'équation pour u^ε :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (4.1)$$

Les estimations du paragraphe précédent conduisent à

$$u^\varepsilon(x, t) \in \mathcal{D} \quad \text{pp } x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (4.17)$$

$$\partial u^\varepsilon / \partial x \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R})), \quad (4.18)$$

$$u^\varepsilon - a^\pm \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^\pm)).$$

(b) Par ailleurs, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)^2$, alors pour L assez grand, on a (en notant $v^L = v^{\varepsilon, L}$):

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \varphi(x, 0)(a(x) - C_L(x)) dx &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left\{ -v^L \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x}(u^L) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial v^L}{\partial x} \right\} dx dt. \end{aligned}$$

Passant à la limite pour $L \rightarrow \infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, 0) a(x) dx = \iint_{\mathbb{R}^2} \left\{ -u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x}(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right\} dx dt,$$

c'est-à-dire que u vérifie la condition initiale (4.2). Enfi (4.17) entraîne (4.2'). Nous avons donc obtenu une solution du problème (P_ε) .

(c) Remarquons maintenant que (4.17) et (4.18) entraînent (f étant lipschitzienne sur \mathcal{D}) que

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R})),$$

de sorte que

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x^2} \in L^2_{\text{loc}}(0, T; L^2(\mathbb{R}))$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x} \in L^\infty_{\text{loc}}(0, T; H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})).$$

Un raisonnement récurrent montre alors qu'en fait

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} \in L^2_{\text{loc}}(0, T; L^2(\mathbb{R})), \quad m \geq 1. \quad (4.20)$$

On a donc la même propriété pour $\partial u^\varepsilon / \partial t$, ce qui entraîne que $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times]0, +\infty[)$.

3. Estimation a priori de u^ε

Le point crucial de la démonstration du théorème (partie (ii)) est le lemme suivant:

LEMME 4.3. *La variation totale de $w(u^\varepsilon(\cdot, t))$ décroît avec t , pour chacun des invariants de Riemann w .*

(a) Pour démontrer ce lemme, on dérive l'équation (4.7) et on multiplie par $\text{sgn}(\partial w / \partial x)$. Comme w est de classe \mathcal{C}^∞ , les termes obtenus ont un sens, et on a:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \text{sgn}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|,$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial w}{\partial x} \right) \text{sgn}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \right) \quad \text{avec } \rho = \lambda + \varepsilon z \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

On obtient donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \right) = \varepsilon \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Et d'après l'inégalité de Kato, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \right) \leq \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|. \quad (4.21)$$

On intègre alors par rapport à x , en utilisant (4.20) qui est aussi valable pour w ,

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| dx \leq 0. \quad (4.22)$$

Et cette inégalité prouve le lemme.

Puisque a est à variation bornée, on a donc

$$VT(w(u^e(\cdot, t))) \leq VT(w(a)). \quad (4.23)$$

Ceci est vrai pour $t > 0$, et pour chacun des deux invariants de Riemann. Mais l'application $(u_1, u_2) \rightarrow (w_1, w_2)$ étant un difféomorphisme, on en déduit l'inégalité annoncée dans le théorème

$$VT(u^e(\cdot, t)) \leq C_0 VT(a). \quad (4.24)$$

La constante C_0 ne dépend que du conditionnement de la transformation $u \rightarrow (w_1, w_2)$ sur \mathcal{D} .

(b) Utilisons maintenant l'équation (4.1). On choisit un champ $Z(x)$ de classe \mathcal{C}^∞ , valant a^\pm au voisinage de $\pm\infty$. On trouve aisément

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} |u - z|^2 dx + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot \frac{\partial(u - z)}{\partial x} dx \\ &+ \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} dx. \end{aligned} \quad (4.25)$$

En vertu de (4.17) et (4.24), on en déduit

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} |u - z|^2 dx + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \leq \text{constante}, \quad (4.26)$$

cette constante étant indépendante de $\varepsilon > 0$. Ainsi

$$\sqrt{\varepsilon}(\partial u^3 / \partial x) \text{ reste dans un borné de } L^2(Q_T). \quad (4.27)$$

Utilisant à nouveau (4.1), (4.17), (4.24), et (4.27), on obtient

$$\partial u^\varepsilon / \partial t \in \text{compact de } L^2(0, T; H^{-1}) + \text{borné de } L^\infty(0, T; L^1). \quad (4.28)$$

Et à l'aide d'un théorème de compacité, (4.28) et (4.24) entraînent que

$$u^\varepsilon \text{ reste dans un compact de } L^2_{\text{loc}}(Q_T). \quad (4.29)$$

4. Passage à la limite ($\varepsilon \rightarrow 0^+$)

(a) Nous procédons comme au paragraphe 2. Si une sous-suite u^{ε_m} , $\varepsilon_m \rightarrow 0$, converge dans $L^\infty(Q_T)$ faible-étoile, elle converge aussi dans $L^2_{\text{loc}}(Q_T)$ donc presque-partout, quitte à extraire une nouvelle sous-suite. Le théorème de convergence dominée assure alors que

$$f(u^{\varepsilon_m}) \rightarrow f(u) \quad \text{dans } L^1_{\text{loc}}(Q) \quad (4.30)$$

où $u = \lim u^{\varepsilon_m}$. Par ailleurs (4.27) montre que

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u^{\varepsilon_m}}{\partial x^2} \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R})). \quad (4.31)$$

Ces convergences et (4.1) assurent que $u(x, t)$ vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (1.1)$$

Par ailleurs les estimations (4.24) et (4.28) montrent que $u(x, t)$ est à variations bornées. De plus (4.17) entraîne que $u(x, t) \in \mathcal{D}$ pp x, t .

La condition initiale est vérifiée de la même manière qu'en 2.

(b) Enfin, si $\varphi(u)$ est une entropie convexe sur \mathcal{D} , de flux $\psi(u)$, on a

$$\frac{\partial \varphi(u^\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(u^\varepsilon)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u^\varepsilon) \cdot \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2} \leq \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi(u^\varepsilon)}{\partial x^2}.$$

De même qu'en (4.30), on a $\varphi(u^{\varepsilon_m}) \rightarrow \varphi(u)$ et $\psi(u^{\varepsilon_m}) \rightarrow \psi(u)$, de sorte qu'en passant à la limite, on trouve:

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(u)}{\partial x} \leq 0. \quad (4.32)$$

5. Conséquences pour les schémas aux différences

Nous n'avons pas utilisé pour cette section l'hypothèse (3.0). On déduit donc du théorème 4.1 que le problème de Riemann possède une solution, sous la seule hypothèse

$$\lambda_1(u) < \lambda_2(u), \quad \forall u \in \mathcal{D}.$$

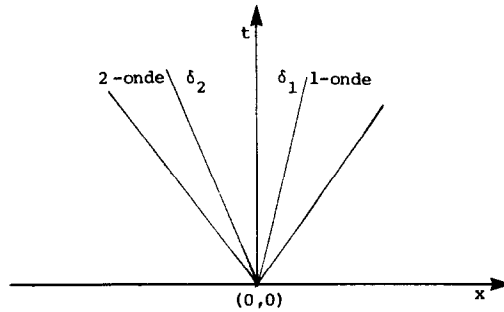


FIGURE 2

Nous ne sommes pas cependant en mesure de prouver que cette solution est unique, ni qu'elle est auto-similaire.

Toutefois la proposition 2.2 reste vraie pour cette solution. On peut donc mettre en oeuvre les schémas étudiés en section 3, même si (3.0) n'est pas vérifiée. Tous les résultats démontrés dans ce paragraphe restent vrais, excepté peut-être la convergence du schéma de Glimm.

Signalons cependant que dans ce cas, seul le schéma de Lax-Friedrichs est explicitement défini. En effet, nous savons que la solution du problème de Riemann existe, mais nous ne savons pas la construire. Il est probable qu'elle est autosimilaire, et qu'elle est constituée d'une alternance de 1-ondes et de 2-ondes. Dans ce cas, la condition de Lax montre que si une 2-onde se trouve à gauche d'une 1-onde (Fig. 2), alors des chocs ont lieu sur les droites δ_1 et δ_2 .

5. DÉCOUPLAGE EN TEMPS FINI

Nous considérons ici la (les) solution(s) obtenue(s) par le schéma de Glimm. Le fait que $w_2(u)$ ne varie pas à travers une 1-onde, quelle soit une 1-détente ou un 1-choc ou une réunion de détente(s) et de choc(s), nous permet de montrer le lemme 5.1. Celui-ci exprime, pour la solution discrète, que $w_2(u^{\Delta x, \Delta t}(x, t)) = w_2(u^-)$ si $x < x^- + t\rho_2 + o(1)$, lorsque $a(x) \equiv u^-$ pour $x < x^-$. Le nombre ρ_2 minore la deuxième valeur propre λ_2 sur le rectangle R^0 .

Le passage à la limite lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ nous donne un résultat analogue pour la solution $u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} u^{\Delta x, \Delta t}$, et pour $x < x^- + t\rho_2$. Par symétrie, on a aussi $w_1(u(x, t)) = w_2(u^+)$ si $x > x^- + t\rho_1$, avec des notations évidentes.

Lorsque $\rho_1 < \rho_2$ (cette hypothèse est un peu plus générale que l'hyperbolicité stricte), on en déduit qu'au delà d'un certain temps

$T^* = (x^+ - x^-)/(\rho_2 - \rho_1)$, le système (1.1) se réduit à une seule loi de conservation à une seule inconnue, dans chacun des deux domaines

$$\{(x, t); t > T^* \text{ et } x < x^- + t\rho_2\}$$

et

$$\{(x, t); t > T^* \text{ et } x < x^+ + t\rho_1\}.$$

Enfin, dans leur intersection, on connaît $u(x, t)$ explicitement par:

$$w_1(u) = w_1(u^+)$$

$$w_2(u) = w_2(u^-).$$

Ces résultats sont décrits dans le théorème 5.3.

1. Propagation des invariants de Riemann, cas discret

Nous supposons que la condition initiale $a(x)$ vérifie

$$a(x) = u^- \quad \text{pour } x < x^- \quad (5.1)$$

Par ailleurs, on suppose toujours que $a(x)$ prend ses valeurs dans un quadrilatère $w^{-1}(R^0)$ dans lequel le système (1.1) est découplé, R^0 étant un rectangle de côtés parallèles aux axes. On est donc dans les conditions de section 3, et la méthode de Glimm fournit une solution discrète $u^{\Delta x, \Delta t}(x, t)$, qui converge presque partout vers une solution $u(x, t)$ de (1.1)–(1.2).

Il est clair que pour $x < x^- - 2\Delta x - t(\Delta x/\Delta t)$ on a $u^{\Delta x, \Delta t}(x, t) = u^-$. On peut donc définir pour chaque $n \geq 0$ le plus grand entier $m(n) \in I_n$ tel que

$$m \leq m(n) \Rightarrow w_2(u^{\Delta x, \Delta t}(m \Delta x, n \Delta t)) = w_2(u^-). \quad (5.2)$$

Vu la définition du schéma, on a bien sûr

$$m(n+1) \geq m(n) - 1,$$

mais nous pouvons être plus précis pour un système découplé.

En effet, si \bar{u} est l'état médian dans la résolution du problème de Riemann entre $b = u_{m(n)}^n$ et $c = u_{m(n)+2}^n$ on a d'après section 2.2,

$$w_2 = w_2(u_{m(n)}^n) = w_2(u^-) \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} u^n(x, t) = \bar{u} \quad & \text{pour tout } X < m(n) \Delta x + \lambda_2(\bar{u})(t - n\Delta t), \\ & X > m(n) \Delta x + \lambda_1(\bar{u})(t - n\Delta t). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ainsi,

$$w_2(u(x, t)) = w_2(u^-) \quad \text{pour } x < m(n) \Delta x + \lambda_2(\bar{u})(t - n\Delta t). \quad (5.5)$$

Notons alors ρ_2 la borne inférieure de $\lambda_2(v)$, lorsque v parcourt l'ensemble

$$\{v \in \mathcal{D}; w(v) \in R^0 \text{ et } w_2(v) = w_2(u^-)\}.$$

D'après (5.3) et (5.5), on a

$$w_2(u^n(x, t)) = w_2(u^-) \quad \text{pour } x < m(n) \Delta x + \rho_2(t - n \Delta t). \quad (5.6)$$

On utilise alors la définition (3.8) du schéma de Glimm pour dire que si

$$a_n < \rho_2 \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \text{alors } w_2(u_{m(n)+1}^{n+1}) = w_2(u^-), \quad (5.7)$$

et donc $m(n+1) \geq m(n) + 1$.

Finalement, on a

$$m(N) \geq m(0) - N + 2 \# \left\{ a_n; n < N, a_n < \rho_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \right\}. \quad (5.8)$$

Cependant, la suite a_n étant équadistribuée dans l'intervalle $] -1, 1[$ on a

$$\# \left\{ a_n; n < N \text{ et } a_n < \rho_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \right\} \sim \frac{N}{2} \left(1 + \rho_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \right). \quad (5.9)$$

Puis il est clair que $m(0) \sim x^- / \Delta x$. Finalement,

$$\begin{aligned} m(0) - N + 2 \# \left\{ a_n; n < N \text{ et } a_n < \rho_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \right\} \\ \sim \frac{x^-}{\Delta x} + N \rho_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty, \Delta x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Or, si $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, on a $u^{x, \Delta t}(x, t) = u_m^N$ où $N \sim t / \Delta t$ et $m \sim x / \Delta x$. On déduit donc de (5.8) le résultat suivant:

LEMME 5.1. *On suppose que les hypothèses de la section 3 sont vérifiées et que (5.1) a lieu. Alors*

$$w_2(u^{x, \Delta t}(x, t)) = w_2(u^-) \quad (5.11)$$

pour tout couple (x, t) vérifiant

$$x < x^- + \rho_2 t + \varepsilon(\Delta t), \quad t > 0 \quad (5.12)$$

où $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$.

2. Propagation des invariants de Riemann (cas continu)

Soit $u(x, t)$ l'une des solutions obtenues à l'aide du schéma de Glimm. Puisqu'une suite extraite de $u^{dx, dt}$ converge presque partout vers u , on déduit aisément du lemme 3.1 le résultat suivant:

COROLLAIRE 5.2. *Soit $u(x, t)$ une solution obtenue par le schéma de Glimm. Alors,*

$$w_2(u(x, t)) = w_2(u^-) \quad (5.13)$$

pour presque tout (x, t) vérifiant

$$x < x^- + \rho_2 t, \quad t > 0. \quad (5.14)$$

Naturellement, une étude similaire peut être conduite pour $w_1(u(x, t))$ lorsque

$$a(x) \equiv u^+ \quad \text{pour } x > x^+. \quad (5.15)$$

Il suffit de définir la borne supérieure ρ_1 de la première valeur propre $\lambda_1(v)$ lorsque $w(v) \in R^0$ et $w_1(v) = w_1(u^+)$. On obtient ainsi

PROPOSITION 5.2'. *On a $w_1(u(x, t)) = w_1(u^+)$ pour presque tout (x, t) vérifiant*

$$x > x^+ + \rho_1 t, \quad t > 0.$$

3. Découplage en temps fini

Nous conservons les hypothèses (5.1) et (5.15) des sections précédentes, et nous en ajoutons une autre:

$$\rho_1 < \rho_2. \quad (5.16)$$

Dans ce cas, pour $t > T^* = (x^+ - x^-)/(\rho_2 - \rho_1)$, on a d'après la section 2:

$$u(x, t) = u^0, \quad x^* + \rho_1(t - T^*) < x < x^* + \rho_2(t - T^*), \quad (5.17)$$

où u^0 est l'état médian du problème de Riemann entre u^- et u^+ , et où $x^* = (\rho_2 x^+ - \rho_1 x^-)/(\rho_2 - \rho_1)$. En effet, pour $\rho_1 < (x - x^*)/(t - T^*) < \rho_2$, on a $w_2(u) = w_2(u^-)$ et $w_1(u) = w_1(u^+)$, c'est-à-dire $u = u^0$ d'après (2.8).

Par ailleurs, dans le domaine $t > T^*$, $(x - x^*)/(t - T^*) < \rho_2$, $w_2(u(x, t)) \equiv w_2(u^-)$, et le système, qui n'a plus qu'une seule inconnue obéit à la loi de conservation (2.5). De même, pour $(x - x^*)/(t - T^*) > \rho_1$, le système n'a qu'une inconnue et obéit à la loi de conservation (2.7).

THÉORÈME 5.3 (Fig. 3). On suppose que

$$a(x) \equiv u^-, \quad x < x^-, \quad (5.1)$$

$$a(x) \equiv u^+, \quad x > x^+, \quad (5.15)$$

et

$$\begin{aligned} & \text{Sup}\{\lambda_1(v); w(v) \in \mathbb{R}^0 \text{ et } w_1(v) = w_1(u^+)\} \\ & < \text{Inf}\{\lambda_2(v); w(v) \in \mathbb{R}^0 \text{ et } w_2(v) = w_2(u^-)\}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Alors il existe $T^* > 0$, $x^* \in \mathbb{R}$ et un secteur:

$$S = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^2; t > T^* \text{ et } \rho_1 < \frac{x - x^*}{t - T^*} < \rho_2 \right\}$$

tels que si $u(x, t)$ est une solution du système (1.1)–(1.2) obtenue par le schéma de Glimm, on ait:

(i) $u(x, t) = u^0$ presque partout dans S , où u^0 est l'état intermédiaire dans la résolution du problème de Riemann de u^- à u^+ .

(ii) $w_2(u(x, t)) = w_2(u^-)$ presque partout à gauche de S , et (1.1) équivaut à la loi

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_2(u_1) = 0. \quad (2.5)$$

(iii) $w_1(u(x, t)) = w_1(u^+)$ presque partout à droite de S , et (1.1) équivaut à la loi (2.7).

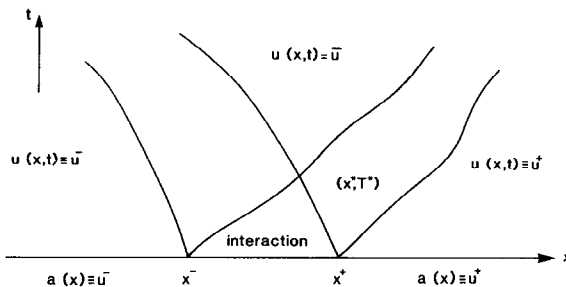


FIGURE 3

REMERCIEMENTS

Je remercie B. Temple pour ses remarques constructives, qui m'ont permis d'améliorer cet article.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. ARIS, AND N. AMUNDSON, "Mathematical Methods in Chemical Engineering," Vol. 2, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1966.
2. J. GLIMM, Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **18** (1965), 697-715.
3. S. K. GODUNOV, A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics, *Math. Sb.* **47** (1959), 271-290.
4. A. HARTEN, J. M. HYMAN AND P. D. LAX, On difference approximations and entropy conditions for shocks, *Comm. Pure Appl. Math.* **29** (1979), 297-322.
5. P. D. LAX, Hyperbolic systems of conservation laws, II, *Comm. Pure Appl. Math.* **10** (1957), 537-567.
6. A. Y. LE ROUX, Approximation des systèmes hyperboliques, in "Cours et Séminaires INRIA: Problèmes hyperboliques, 28 Sept.-2 Octobre 1981, Rocquencourt," p. 171.
7. A. Y. LE ROUX, "Approximation de quelques problèmes hyperboliques non linéaires," Thèse, Rennes, France, 1977.
8. J. L. LIONS, "Quelques méthodes de résolution pour des problèmes aux limites non linéaires," Dunod, Paris, 1969.
9. T. P. LIU, The deterministic version of the Glimm scheme, *Comm. Math. Phys.* **57** (1977), 135-148.
10. O. OLEINIK, Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation, *Amer. Math. Soc. Transl. Vol. 33*, pp. 285-290, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1964.
11. O. OLEINIK, Discontinuous solutions of nonlinear differential equations, *Amer. Math. Soc. Transl. Vol. 26*, pp. 95-172, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1957.
12. M. SCHATZMAN, Théorie d'existence pour les systèmes: méthode de Glimm, in "Cours et Séminaires INRIA: Problèmes hyperboliques, 28 Sept.-2 Oct. 1981, Rocquencourt," pp. 131-154.
13. B. TEMPLE, Systems of conservation laws with invariant submanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **280** (1983), 781-795.